

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A IX A

1. Pe diagonala BD a paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul M astfel încât $\overline{BD} = 3 \cdot \overline{BM}$. Fie P , punctul ales astfel încât $2 \cdot \overline{AP} = 3 \cdot \overline{AM}$. Demonstrați că:

a) $\overline{AM} = \frac{1}{3}(\overline{2AB} + \overline{AD})$;

b) $\overline{BP} = \frac{1}{2} \overline{AD}$

c) punctele B , P și C sunt coliniare.

2. Se consideră o funcție $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ având următoarele proprietăți:

(i) $f(m+2n) = f(m) + 2f(n)$, pentru orice numere impare m și n ;

(ii) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ pentru orice numere m și n de aceeași paritate.

a) Calculați $f(1)$, $f(3)$ și $f(5)$;

b) Demonstrați prin inducție completă că $f(2n+1) = 2n+1$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Gazeta Matematică 7-8-9/2010, modificată

3. Mulțimea $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{N}^*$ se numește "aritmetică" dacă unul dintre elementele ei este media aritmetică a celorlalte două.

(De exemplu mulțimea $\{3, 10, 17\}$ este "aritmetică", întrucât: $10 = \frac{3+17}{2}$).

Considerăm mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$.

i) Justificați faptul că $A = \{a, b, c\} \subset \mathbb{N}^*$ este "aritmetică" dacă și numai dacă este de forma $A = \{a, a+r, a+2r\}$ cu $a, r \in \mathbb{N}^*$.

ii) Să se determine numărul de submulțimi "aritmice" ale mulțimii M .

4. O ciocolată are forma unui dreptunghi, împărțit cu ajutorul unor linii orizontale și verticale în dreptunghiuri mai mici (pe care le vom numi "pătrățele").

a) Cătălin taie ciocolata cu un cuțit astfel încât tăietura să treacă prin centrul dreptunghiului. Demonstrați că el va obține două bucăți cu arii egale, indiferent de poziția tăieturii.

b) Presupunem ca din ciocolată lipsește un "pătrățel" oarecare. Cum poate proceda Cătălin pentru ca, în acest caz, printr-o singură tăietură de cuțit, să împartă ciocolata în două bucăți având arii egale?

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A X A

1. Între localitățile A și B sunt 54 km. Cătălin pleacă din localitatea A spre localitatea B și parcurge, în prima etapă 24 km cu viteză constantă. Apoi se odihnește o oră și ajunge în localitatea B după 14 ore de la plecare, mergând cu viteză dublă față de viteza din prima etapă. Determinați viteza cu care s-a deplasat Cătălin în prima etapă.

2. Se dau numerele reale $x, y, z \in (1, +\infty)$ și $a > 0$. Demonstrați că:

a) $\frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \sqrt{xy}$;

b) $a + \frac{1}{a} \geq 2, (\forall) a \in (0, \infty)$;

b) $\log_x \frac{y^2 + z^2}{y + z} + \log_y \frac{z^2 + x^2}{z + x} + \log_z \frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq 3$.

3. Se dau numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$.

a) Demonstrați că dacă $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+ab} = \frac{1}{2}$, atunci $a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a + b - 1 = 0$;

b) Descompuneți în factori expresia $E(a, b) = a^2b^2 - a^2b - ab^2 + a + b - 1$;

c) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\frac{1}{1+2^x} + \frac{1}{1+3^x} - \frac{1}{1+6^x} = \frac{1}{2}$.

Gazeta Matematică 10/2010, modificată

4.

a) Se dau numerele complexe $z_1 = a + ib$ și $z_2 = b + ia$, de modul 1. Să se demonstreze că $z_2 = \frac{i}{z_1}$.

b) Cătălin trebuie să înmulțească 2011 numere complexe de modul 1. Din greșeală, el schimbă între ele partea reală cu coeficientul părții imaginare, la fiecare factor al produsului și astfel obține drept rezultat final numărul $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Care trebuia să fie rezultatul corect al produsului 2011 numere complexe?

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XI A

1. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{N})$. Câte astfel de matrice au proprietatea că atât suma elementelor de pe diagonala principală, cât și suma elementelor de pe diagonala secundară, sunt egale cu 7?

2. Se dă funcția $f : E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \sqrt{\frac{2-|x-2|}{2+|x-2|}}$.

- a) Să se determine mulțimea maximă de existență a funcției f ;
 b) Să se studieze continuitatea funcției f pe această mulțime;

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{\frac{2}{|x-2|}}$;

d) Să se cerceteze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x))^{\frac{2}{x-2}}$

3. Cătălin și Simona își trimit mesaje codificate procedând în felul următor:

- atribuie literelor alfabetului, excluzând diacriticele, numere consecutive, repetând fiecare număr și alternând semnele + și - astfel:

A	B	C	D	E	F	G	H	W	X	Y	Z
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	↓	↓	↓
1	-1	2	-2	3	-3	4	-4		12	-12	13	-13

- transformă mesajul într-un șir de numere (în care zero semnifică spațiul liber dintre două cuvinte) și aranjează șirul de numere într-o matrice pătratică $T \in M_3(\mathbb{Z})$, citite pe linii, începând cu prima linie, în ordinea trimiterii;

- folosește matricea $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pe post de "cheie" de decodificare și obține matricea

$$T = C \cdot X$$

Într-o zi Simona i-a trimis lui Cătălin mesajul KIIAC GOM. Decodificați acest mesaj, citit din matricea X .

4. Se dau funcțiile $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = \frac{1}{m} \cdot x + m$, unde m este un parametru rațional pozitiv și fie

G_m graficul funcției f_m .

- a) Dacă $p, q \in \mathbb{Q}_+^*$ sunt distincte, determinați punctul de intersecție al graficelor G_p și G_q .
 b) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt numere naturale consecutive, atunci aria triunghiului determinat de intersecțiile graficelor G_a, G_b și G_c este egală cu 1.

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA JUDEȚEANĂ - 12 martie 2011
Profil real, specializarea științele naturii

CLASA A XII A

1. Cătălin alege, la întâmplare, un element al inelului \mathbb{Z}_n . Aflați probabilitatea ca elementul ales să fie inversabil, în fiecare din cazurile:

- a) $n = 12$;
- b) $n = 2011$ (2011 este număr prim).

2. Populația unei localități este $P = P(t)$, unde $P(t)$ reprezintă numărul de locuitori la timpul t , exprimat în ani. Rata de creștere a populației este data de legea $P'(t) = t \cdot e^t$, unde $e \approx 2,7$ este baza logaritmului natural, iar $P'(t)$ semnifică derivata funcției P . Dacă inițial (la timpul $t_0 = 0$) numărul de locuitori ai localității era 2011, câți locuitori vor fi în acea localitate după 5 ani ? $[e^5 = 148,5]$.

3. Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \mid |ad| + |bc| = 1, |ab| + |cd| = 0 \right\}$.

i) Dacă $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, demonstrați că A, A^2, A^3, A^4, AB și A^2B sunt din G .

ii) Determinați cardinalul mulțimii G .

b) Demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

4. Cătălin are la dispoziție 100 de recipiente de formă sferică S_1, S_2, \dots, S_{100} și 10 litri de vin. Știind că raza recipientului S_n este $r_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ decimetri, oricare ar fi $n = \overline{1,100}$, stabiliți dacă îi sunt suficienți cei 10 litri pentru a umple toate recipientele.

Notă. Se admite cunoscut faptul că volumul unei sfere de rază $r > 0$ este $V = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.